2章　ラプラス変換

BASIC

104　$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とする．
原関数の微分法則より，$\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$

（1）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = \mathcal{L}[-1]$$
$$sX(s) - x(0) + X(s) = -\frac{1}{s}$$
$$sX(s) - 0 + X(s) = -\frac{1}{s} \quad \longleftarrow x(0) = 0$$
$$(s+1)X(s) = -\frac{1}{s}$$
$$X(s) = -\frac{1}{s(s+1)} = -\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

※ 部分分数分解の途中式は省略

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$
$$= -(1 - e^{-t})$$
$$= \boldsymbol{e^{-t} - 1}$$

（2）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt} - 2x\right] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$
$$sX(s) - x(0) - 2X(s) = \frac{1}{s-2}$$
$$sX(s) - 0 - 2X(s) = \frac{1}{s-2} \quad \longleftarrow x(0) = 0$$
$$(s-2)X(s) = \frac{1}{s-2}$$
$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]$$
$$= \boldsymbol{te^{2t}}$$

105　$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると，原関数の微分法則より

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0)$$

（1）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x\right] = \mathcal{L}[e^{-1}]$$
$$s^2X(s) - x(0)s - x'(0) + sX(s) - x(0) - 2X(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$s^2X(s) + sX(s) - 2X(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$\longleftarrow x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$
$$(s^2 + s - 2)X(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s-2)} = \frac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

ここで，$\dfrac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \dfrac{a}{s-1} + \dfrac{b}{s+1} + \dfrac{c}{s+2}$

とおき，両辺に $(s-1)(s+1)(s+2)$ をかけると

$$1 = a(s+1)(s+2) + b(s-1)(s+2) + c(s-1)(s+1)$$

これが s についての恒等式になるから，$s = 1$ を代入して

$$1 = a(1+1)(1+2) + 0b + 0c$$

よって，$1 = 6a$ となるから，$a = \dfrac{1}{6}$

$s = -1$ を代入して

$$1 = 0a + b(-1-1)(-1+2) + 0c$$

よって，$1 = -2b$ となるから，$b = -\dfrac{1}{2}$

$s = -2$ を代入して

$$1 = 0a + 0b + c(-2-1)(-2+1)$$

よって，$1 = 3c$ となるから，$c = \dfrac{1}{3}$

以上より，$X(s) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s+2}$

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+2}\right]$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t}}$$

（2）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x\right] = \mathcal{L}[0]$$
$$s^2X(s) - x(0)s - x'(0) - 4\{sX(s) - x(0)\} + 5X(s) = 0$$
$$s^2X(s) - 1 - 4sX(s) + 5X(s) = 0$$
$$\longleftarrow x(0) = 0,\ x'(0) = 1$$
$$s^2X(s) - 4sX(s) + 5X(s) = 1$$
$$(s^2 - 4s + 5)X(s) = 1$$
$$X(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$
$$= \frac{1}{(s-2)^2 - 4 + 5} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2 + 1^2}\right]$$
$$= \boldsymbol{e^{2t}\sin t}$$

106　$x'(0) = \alpha$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とする．

（1）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\right] = \mathcal{L}[0]$$
$$s^2X(s) - x(0)s - x'(0) - \{sX(s) - x(0)\} = 0$$
$$s^2X(s) - s - \alpha - sX(s) + 1 = 0 \longleftarrow x(0) = 1,\ x'(0) = \alpha$$
$$s^2X(s) - sX(s) = s + \alpha - 1$$
$$(s^2 - s)X(s) = s + \alpha - 1$$
$$X(s) = \frac{s + \alpha - 1}{s^2 - s} = \frac{s}{s^2 - s} + \frac{\alpha - 1}{s^2 - s}$$
$$= \frac{1}{s-1} + \frac{\alpha - 1}{s(s-1)}$$
$$= \frac{1}{s-1} + (\alpha - 1)\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)$$

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} + (\alpha - 1)\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)\right]$$
$$= e^t + (\alpha - 1)(e^t - 1)$$

ここで，$x(1) = e$ より，$e + (\alpha - 1)(e - 1) = e$

$(\alpha - 1)(e - 1) = 0$

$e - 1 \fallingdotseq 0$ であるから，$\alpha - 1 = 0$

以上より，$x(t) = e^t + 0\cdot(e - 1) = \boldsymbol{e^t}$

（2）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + 4x\right] = \mathcal{L}[1]$$

$$s^2X(s)-x(0)s-x'(0)+4X(s)=\frac{1}{s}$$
$$s^2X(s)-2s-\alpha+4X(s)=\frac{1}{s} \longleftarrow x(0)=2,\ x'(0)=\alpha$$
$$s^2X(s)+4X(s)=\frac{1}{s}+2s+\alpha$$
$$(s^2+4)X(s)=\frac{2s^2+1}{s}+\alpha$$
$$X(s)=\frac{2s^2+1}{s(s^2+4)}+\frac{\alpha}{s^2+4}$$

ここで，$\dfrac{2s^2+1}{s(s^2+4)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{7s}{s^2+4}\right)$

※ 部分分数分解の途中の計算は略

したがって

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}+\frac{7s}{s^2+4}\right)+\frac{\alpha}{s^2+4}\right] \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}+7\cdot\frac{s}{s^2+2^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\right] \\ &= \frac{1}{4}(1+7\cos 2t)+\frac{\alpha}{2}\sin 2t \end{aligned}$$

ここで，$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$ より

$$\frac{1}{4}\left(1+7\cos\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{2}=-2$$

これより，$\dfrac{1}{4}+\dfrac{\alpha}{2}=-2$ であるから，$\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{9}{4}$

以上より

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}(1+7\cos 2t)-\frac{9}{4}\sin 2t \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\cos 2t-\frac{9}{4}\sin 2t} \end{aligned}$$

107　$x(0)=a,\ x'(0)=b$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$ とする．

（1）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}+3x\right]=\mathcal{L}[1]$$
$$sX(s)-x(0)+3X(s)=\frac{1}{s}$$
$$sX(s)-a+3X(s)=\frac{1}{s}$$
$$(s+3)X(s)=\frac{1}{s}+a$$
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s(s+3)}+\frac{a}{s+3} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)+\frac{a}{s+3} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)+\frac{a}{s+3}\right] \\ &= \frac{1}{3}(1-e^{-3t})+ae^{-3t} \\ &= \frac{1}{3}+\left(a-\frac{1}{3}\right)e^{-3t} \end{aligned}$$

ここで，任意定数を，$a-\dfrac{1}{3}=A$ にとりなおすと

$$\boldsymbol{x(t)=\frac{1}{3}+Ae^{-3t}}$$

（2）　与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}-16x\right]=\mathcal{L}[0]$$
$$s^2X(s)-x(0)s-x'(0)-16X(s)=0$$
$$s^2X(s)-as-b-16X(s)=0$$
$$(s^2-16)X(s)=as+b$$
$$X(s)=\frac{as+b}{s^2-16}=\frac{as+b}{(s-4)(s+4)}$$

ここで，$\dfrac{as+b}{(s-4)(s+4)}=\dfrac{A}{s-4}+\dfrac{B}{s+4}$ とおき，両辺に $(s-4)(s+4)$ をかけると

$$as+b=A(s+4)+B(s-4)$$
$$as+b=(A+B)s+(4A-4B)$$

これが，s についての恒等式となるためには

$$\begin{cases} A+B=a \\ 4A-4B=b \end{cases}$$

これより，$A=\dfrac{1}{8}(4a+b),\quad B=\dfrac{1}{8}(4a-b)$

任意定数を，$A,\ B$ にとりなおすと

$$X(s)=\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+4}$$

したがって

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+4}\right] \\ &= \boldsymbol{Ae^{4t}+Be^{-4t}} \end{aligned}$$

108　
$$\begin{aligned} t^3*t &= \int_0^t \tau^3(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t (t\tau^3-\tau^4)\,d\tau \\ &= \left[\frac{1}{4}t\tau^4-\frac{1}{5}\tau^5\right]_0^t \\ &= \frac{1}{4}t^5-\frac{1}{5}t^5=\boldsymbol{\frac{1}{20}t^5} \end{aligned}$$

109　※ $t^2*t=\dfrac{1}{12}t^4$ を既知とします.

$$\begin{aligned} t*(t^2+t^3) &= t*t^2+t*t^3 \\ &= t^2*t+t^3*t \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{20}t^5} \end{aligned}$$

110　
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^3*t] &= \mathcal{L}[t^3]\,\mathcal{L}[t] \\ &= \frac{6}{s^4}\cdot\frac{1}{s^2}=\boldsymbol{\frac{6}{s^6}} \end{aligned}$$

直接求めると，**108** より，$t^3*t=\dfrac{1}{20}t^5$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^3*t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{20}t^5\right] \\ &= \frac{1}{20}\cdot\frac{5\,!}{s^6} \\ &= \frac{1}{20}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{s^6}=\boldsymbol{\frac{6}{s^6}} \end{aligned}$$

111（1）
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2-4s+4}\right] &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4s+4}\right] \\ &= f(t)*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] \\ &= f(t)*te^{2t} \\ &= \boldsymbol{\int_0^t f(t-\tau)\tau e^{2\tau}\,d\tau} \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2-5s+6}\right] &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-5s+6}\right] \\ &= f(t)*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s-2)}\right] \\ &= f(t)*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-2}\right] \\ &= f(t)*(e^{3t}-e^{2t}) \\ &= \boldsymbol{\int_0^t f(t-\tau)(e^{3\tau}-e^{2\tau})\,d\tau} \end{aligned}$$

（3）$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s^2+4s+13}\right] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+4s+13}\right]$

$$= f(t) * \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+9}\right]$$

$$= f(t) * \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\int_0^t f(t-\tau)e^{-3\tau}\sin 3\tau \, d\tau}$$

112（1）　左辺は，$x(t)$ と $\cos t$ のたたみこみであるから，$x(t) * \cos t$ と表すことができる．$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}[x(t) * \cos t] = \mathcal{L}[t]$$
$$\mathcal{L}[x(t)]\,\mathcal{L}[\cos t] = \mathcal{L}[t]$$
$$X(s) \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2}$$

これより，$X(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^3}$

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^3}\right]$$
$$= \boldsymbol{1 + \frac{1}{2}t^2}$$

（2）　左辺は，$x(t)$ と e^t のたたみこみであるから，$x(t) * e^t$ と表すことができる．$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}[x(t) * e^t] = \mathcal{L}[t]$$
$$\mathcal{L}[x(t)]\,\mathcal{L}[e^t] = \mathcal{L}[t]$$
$$X(s) \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2}$$

これより，$X(s) = \dfrac{s-1}{s^2} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2}$

したがって

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right]$$
$$= \boldsymbol{1 - t}$$

113　$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおき，与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) - 7\{(sY(s) - y(0)\} + 12Y(s) = X(s)$$

$y(0) = y'(0) = 0$ であるから

$$s^2Y(s) - 7sY(s) + 12Y(s) = X(s)$$
$$(s^2 - 7s + 12)Y(s) = X(s)$$

よって，$Y(s) = \dfrac{X(s)}{s^2-7s+12}$ であるから，伝達関数を $H(s)$ とすれば

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{1}{s^2-7s+12}}$$

また

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}[H(s)] * \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-7s+12}\right] * x(t)$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)(s-3)}\right] * x(t)$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4} - \frac{1}{s-3}\right] * x(t)$$
$$= (e^{4t} - e^{3t}) * x(t)$$
$$= \boldsymbol{\int_0^t (e^{4\tau} - e^{3\tau})x(t-\tau)\, d\tau}$$

114　与式 $= \mathcal{L}[e^t]\,\mathcal{L}[\delta(t)]$

$$= \mathcal{L}[e^t] \cdot 1$$
$$= \mathcal{L}[e^t]$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{s-1}}$$

115　$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$　$(t > 0)$ として，与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換をつくると

$$s^2Y(s) - y(0)s + y'(0) + \{sY(s) - y(0)\} - 2Y(s) = 1$$

$y(0) = 0, = y'(0) = 0$ であるから

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = 1$$
$$(s^2 + s - 2)Y(s) = 1$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$$
$$= \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right)$$

したがって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right)\right]$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})} \quad (t > 0)$$

∎